

$$1) \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(\det n)(H) = \text{tr}(t_{\text{com}}(n)H)$$

2) Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont exactement les éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Lemme: Soient E, F, G des evm. Soit $\varphi: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, continue.

$$\text{Alors: } \forall (x, y) \in E \times F, (h, k) \in E \times F, d\varphi_{(x, y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$$

$$\rightarrow \text{On a } \varphi(x, y) + (h, k) = \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + \underbrace{\varphi(x, k) + \varphi(h, y)}_{\tilde{\varphi}} + \varphi(h, k).$$

Par continuité de φ : $\|\varphi(h, k)\| \leq C\|h\|\|k\|$ pour un certain $C > 0$.

Donc $\varphi(h, k) = o(\|(h, k)\|)$ (on prend $\|(h, k)\| = \max(\|h\|, \|k\|)$).

De plus, $\tilde{\varphi}$ est bilinéaire.

$\tilde{\varphi}$ est continue car φ l'est.

Donc $\tilde{\varphi}$ est la différentielle de φ en (x, y) .

D'où le résultat voulu.

1) Soit $(E_{i,j})_{i,j}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Par définition: } \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(n + tE_{i,j}) - \det(n)}{t}$$

$$\text{Or, } \det(n + tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,m} \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & 0 & m_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & 1 & m_{n,m} \end{vmatrix} \quad \leftarrow i, j$$

$$C_j = t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} = \det(n)$$

développement % à la j-ième colonne $\rightarrow = \det(n) + t(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(n) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors: } \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(\det n)(H) &= d(\det n)\left(\sum_{i,j} h_{i,j} E_{i,j}\right) \quad \text{linéarité de la diff.} \\ &= \sum_{i,j} h_{i,j} d(\det n)(E_{i,j}) \quad \text{"def"} \sim d(\det n)(E_{i,j}) = \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}}(n) \\ &= \sum_{i,j} h_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \\ &= \sum_{i,j} [H]_{i,j} [t_{\text{com}}(n)]_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [H]_{i,j} [t_{\text{com}}(n)]_{j,i} = \sum_{i=1}^n [H t_{\text{com}}(n)]_{i,i} \end{aligned}$$

Finalement: $\forall M \in \text{GL}_m(\mathbb{R}), \forall H \in \text{SL}_m(\mathbb{R}), d(\det M)(H) = \text{tr}({}^t \text{com}(M) H)$.

Rq: Si $M \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$, on a $M^{-1} \det(M) = {}^t \text{com}(M)$ donc:

$$\forall H \in \text{SL}_m(\mathbb{R}), d(\det M)(H) = \text{tr}(M^{-1} \det(M) H) = \det(M) \text{tr}(M^{-1} H).$$

2) On a $\|M\|_F^2 = \text{tr}({}^t M M)$.

On pose $f: M \mapsto \text{tr}({}^t M M)$ et $g: M \mapsto \det(M) - 1$.

On cherche à minimiser f sur $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ (soit sous la contrainte $g=0$).

$f|_g$ admet un min sur $\text{SL}_m(\mathbb{R})$.

$I_m \in \text{SL}_m(\mathbb{R})$ donc $\inf_{M \in \text{SL}_m(\mathbb{R})} f(M) \leq f(I_m) = m$

Donc si $M \in \text{SL}_m(\mathbb{R})$ minimise f , $\|M\|_F \leq \sqrt{m}$ i.e. $M \in \overline{B(0, \sqrt{m})}$

$\text{SL}_m(\mathbb{R}) \cap \overline{B(0, \sqrt{m})}$ est compact (fermé + borné en dim finie), donc f admet un min sur ce cpt. Notons le A .

avec $g=0$ min sur ce cpt. Notons le A .

f, g sont C^1 , donc diff et: $\forall H \in \text{SL}_m(\mathbb{R}), df_A(H) = d(\det A)(H) \stackrel{A \in \text{SL}_m(\mathbb{R})}{=} \text{tr}(A^{-1} H)$

$$df_A(H) \stackrel{\uparrow}{=} \text{tr}({}^t A H) + \text{tr}({}^t H A) = 2 \text{tr}({}^t A H)$$

par le lemme, en voyant f comme

$\varphi \circ \psi$ avec $\varphi: (M, N) \mapsto \text{tr}({}^t M N)$ et $\psi: M \mapsto (M, M)$

f admet un min $\overset{A}{\text{sur}}$ $\{M \mid g(M)=0\}$, $df_A \neq 0$ donc par le théorème des extrema liés:

$$\exists \lambda > 0 \text{ tq } df_A = \lambda dg_A$$

Ainsi: $\forall H \in \text{SL}_m(\mathbb{R}), 2 \text{tr}({}^t A H) = \lambda \text{tr}(A^{-1} H)$.

Comme ceci est valable pour tout H , on "évalue" en $H = E_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

(Multiplier M à droite par $E_{i,j}$ revient à "~~conserver~~ déplacer" le i -ième colonne en j -ième colonne, donc lorsque l'on regarde $\text{tr}({}^t A E_{i,j})$, on obtient $[{}^t A]_{i,j}$).

Ainsi, par identification: $2 {}^t A = \lambda A^{-1}$ i.e. $2 {}^t A A = \lambda I_m$.

En composant par le déterminant on obtient: $2^m = \lambda^m$.

Comme ${}^t A A$ est def. positive, $\lambda > 0$.

Donc $\lambda = 2$.

Donc ${}^t A A = I_m$ i.e. $A \in \text{SO}_m(\mathbb{R})$, et $f(A) = m$ (dc le min vaut m).

Rec, si $M \in \text{SO}_m(\mathbb{R})$, alors $M \in \text{SL}_m(\mathbb{R})$ et $f(M) = m$.

Donc M réalise le minimum.